nan **estimaciones de orden de magnitud**. El gran físico italo-estadounidense Enrico Fermi (1901-1954) los llamaba "cálculos del reverso de un sobre".

Los ejercicios 1.18 a 1.29 del final de este capítulo son de estimación u "orden de magnitud". Algunos son risibles, y casi todos requieren estimar los datos de entrada requeridos. No intente consultar muchos datos; estímelos como mejor pueda. Aun cuando difieran por un factor de diez, los resultados podrían ser útiles e interesantes.

Ejemplo 1.4 Estimación de orden de magnitud

Suponga que usted escribe una novela de aventuras, donde el héroe huye a otro país con mil millones de dólares en oro en la maleta. ¿Es posible esto? ¿Cabría tanto oro en una maleta? ¿Sería demasiado pesado irla cargando?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR, PLANTEAR Y EJECUTAR: El oro se vende a unos 400 dólares la onza; aunque el precio llega a variar entre 200 y 600 dólares, pero no importa. Una onza equivale a unos 30 gramos. De hecho, una onza ordinaria (avoirdupois) son 28.35 g; una onza de oro es una onza troy, la cual pesa 9.45% más, pero de nuevo no importa. Diez dólares en oro tienen una masa de aproximadamente 1 g, así que mil millones (10^9) de dólares en oro son cien millones (10^8) de gramos es decir cien mil (10^5) kilogramos, que corresponde a un peso en unidades británicas de aproximadamente 200,000 lb, o 100 toneladas. Ya sea que el número exacto se acerque más a 50 toneladas o a 200 toneladas, el héroe no sería capaz de cargar tanto peso en una maleta al cruzar la frontera.

También podemos estimar el *volumen* del oro. Si su densidad fuera igual a la del agua (1 g/cm^3), el volumen sería 10^8 cm^3, es decir, 100 m^3. Sin embargo, el oro es un metal pesado; pensaríamos que su densidad es 10 veces la densidad del agua. De hecho, el oro es 19.3 veces más denso que el agua; pero al estimar 10 obtenemos un volumen de 10 m^3. ¡Imagine 10 pilas cúbicas de lingotes de oro, cada una con 1 m por lado, y pregúntese si cabrían en una maleta!

EVALUAR: Es evidente que hay que rescribir la novela. Pruebe el cálculo ahora con una maleta llena de diamantes de cinco quilates (1 gramo), cada uno de los cuales vale 100,000 dólares. ¿Ahora sí podría lograrse?

Evalúe su comprensión de la sección 1.6 ¿Podría estimar el número de dientes que hay en todas las bocas de su campus universitario (estudiantes, empleados y profesores)? (*Sugerencia:* ¿cuántos dientes tiene usted en su boca? Cuéntelos.)

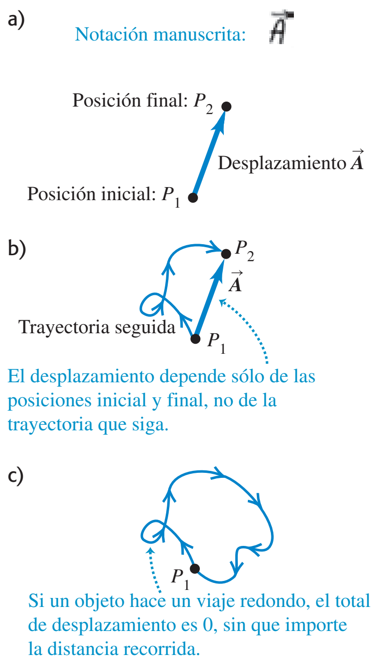
1.7 Vectores y suma de vectores

Algunas cantidades físicas, como tiempo, temperatura, masa y densidad se pueden describir completamente con un número y una unidad. No obstante, en física muchas otras cantidades importantes están asociadas con una *dirección* y no pueden describirse con un solo número. Un ejemplo sencillo es el movimiento de un avión: para describirlo plenamente, debemos indicar no sólo qué tan rápidamente se mueve, sino también hacia dónde. Para ir de Chicago a Nueva York, un avión debe volar al este, no al sur. La rapidez del avión combinada con su dirección constituye una cantidad llamada *velocidad*. Otro ejemplo es la *fuerza*, que en física es un empuje o tirón aplicado a un cuerpo. Para describir plenamente una fuerza hay que indicar no sólo su intensidad, sino también en qué dirección tira o empuja.

Cuando una cantidad física se describe con un solo número, decimos que es una **cantidad escalar**. En cambio, una **cantidad vectorial** tiene tanto una **magnitud** (el "qué tanto") como una dirección en el espacio. Los cálculos que combinan cantidades escalares usan las operaciones aritméticas ordinarias. Por ejemplo, 6 kg + 3 kg = 9 kg, o 4×2 s = 8 s. No obstante, combinar vectores requiere un conjunto de operaciones diferente.

Para entender mejor los vectores y su combinación, comencemos con la cantidad vectorial más sencilla, el **desplazamiento**, que es simplemente un cambio en la posición de un punto. (El punto podría representar una partícula o un cuerpo pequeño.) En la figura 1.9a representamos el cambio de posición del punto P_1 al punto P_2 con una línea que va de P_1 a P_2, con una punta de flecha en P_2 para indicar la dirección. El desplazamiento es una cantidad vectorial porque debemos decir no sólo cuánto se mueve la partícula, sino también hacia dónde. Caminar 3 km al norte desde nuestra

1.9 Desplazamiento como una cantidad vectorial. Un desplazamiento es siempre un segmento recto dirigido desde el punto inicial hasta el punto final, aunque la trayectoria sea curva.

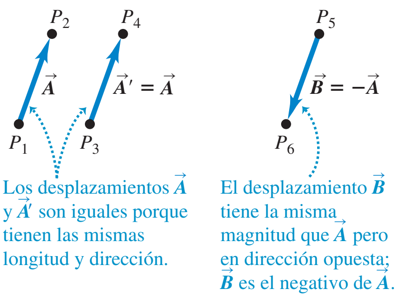


casa no nos lleva al mismo sitio que caminar 3 km al sureste; ambos desplazamientos tienen la misma magnitud, pero diferente dirección.

Frecuentemente representamos una cantidad vectorial como el desplazamiento con una sola letra, como $\vec{A}$ en la figura 1.9a. En este libro siempre simbolizaremos los vectores con ***letras negritas y cursivas con una flecha arriba***, como recordatorio de que las cantidades vectoriales tienen propiedades diferentes que las cantidades escalares; la flecha nos recuerda que los vectores tienen dirección. Los símbolos manuscritos de los vectores suelen subrayarse o escribirse con una flecha arriba (figura 1.9a). *Siempre* escriba los símbolos vectoriales con una flecha arriba. Si no distingue entre cantidades vectoriales y escalares en su notación, probablemente tampoco lo hará en su mente, y se confundirá.

Al *dibujar* un vector, siempre trazamos una línea con punta de flecha. La longitud de la línea indica la magnitud del vector, y su dirección es la del vector. El desplazamiento siempre es un segmento recto dirigido del punto inicial al punto final, aunque la trayectoria real seguida por la partícula sea curva. En la figura 1.9b, la partícula sigue el camino curvo de P_1 a P_2, pero el desplazamiento sigue siendo el vector $\vec{A}$. Observe que el desplazamiento no se relaciona directamente con la *distancia* total recorrida. Si la partícula siguiera a P_2 y volviera a P_1, el desplazamiento total sería cero (figura 1.9c).

Si dos vectores tienen la misma dirección, son **paralelos**; si tienen la misma magnitud *y* la misma dirección, son *iguales*, sea cual fuere su ubicación en el espacio. El vector $\vec{A}'$ de P_3 a P_4 en la figura 1.10 tiene las mismas longitud y dirección que el vector $\vec{A}$ de P_1 a P_2. Ambos desplazamientos son iguales, aunque parten de puntos distintos. Escribimos esto como $\vec{A}' = \vec{A}$ en la figura 1.10, usando un signo igual en negritas para resaltar que la igualdad de dos cantidades vectoriales no es lo mismo que la igualdad de dos cantidades escalares. Dos vectores sólo son iguales si tienen la misma magnitud *y* la misma dirección.



1.10 El significado de vectores que tienen la misma magnitud, y la misma dirección o la dirección opuesta.

Sin embargo, el vector $\vec{B}$ de la figura 1.10 no es igual a $\vec{A}$ porque su dirección es *opuesta*. Definimos el **negativo de un vector** como un vector con la misma magnitud que el original pero con la dirección *opuesta*. El negativo de $\vec{A}$ se denota con $-\vec{A}$, y usamos un signo menos en negrita para destacar la índole vectorial de las cantidades. Si $\vec{A}$ es 87 m al sur, entonces $-\vec{A}$ es 87 m al norte. Así, la relación entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en la figura 1.10 puede escribirse como $\vec{A} = -\vec{B}$ o $\vec{B} = -\vec{A}$. Si dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen direcciones opuestas, sean sus magnitudes iguales o no, decimos que son **antiparalelos**.

Frecuentemente representamos la *magnitud* de una cantidad vectorial (su longitud, en el caso de un vector de desplazamiento) con la misma letra que usamos para el vector pero en *cursiva normal sin* la flecha arriba. Una notación alterna es el símbolo vectorial encerrado entre barras verticales:

$$(\text{Magnitud de } \vec{A}) = A = |\vec{A}| \tag{1.1}$$

Por definición, la magnitud de una cantidad vectorial es una cantidad escalar (un número) y *siempre es positiva*. Cabe señalar también que un vector nunca puede ser igual a un escalar porque son cantidades de tipo distinto. ¡La expresión "$\vec{A} = 6$ m" es tan absurda como "2 naranjas = 3 manzanas" o "6 lb = 7 km"!

Al dibujar diagramas con vectores, normalmente usamos una escala similar a la escala de los mapas. Por ejemplo, un desplazamiento de 5 km podría representarse con un vector de 1 cm en un diagrama; y un desplazamiento de 10 km, con un vector de 2 cm. En un diagrama de vectores de velocidad, podríamos usar una escala para representar un vector de 1 cm como una velocidad cuya magnitud es de 5 metros por segundo (5 m/s). Entonces, una velocidad de 20 m/s se representaría con un vector de 4 cm, con la dirección adecuada.

Suma de vectores

Suponga que una partícula sufre un desplazamiento $\vec{A}$, seguido por un segundo desplazamiento $\vec{B}$ (figura 1.11a). El resultado final es el mismo que si la partícula hubiera partido del mismo punto y sufrido un solo desplazamiento $\vec{C}$, como se muestra. Llamamos a $\vec{C}$ **suma vectorial**, o **resultante**, de los desplazamientos $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Expresamos esta relación simbólicamente como

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \tag{1.2}$$

El signo más en negritas destaca que sumar dos cantidades vectoriales requiere un proceso geométrico y no es lo mismo que sumar dos cantidades escalares como 2 + 3 = 5. Al sumar vectores, por lo regular colocamos la *cola* del *segundo* vector en la *cabeza*, o punta, del *primer* vector (figura 1.11a).

Si efectuamos los desplazamientos $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en orden inverso, primero $\vec{B}$ y luego $\vec{A}$ el resultado será el mismo (figura 1.11b). Entonces,

$$\vec{C} = \vec{B} + \vec{A} \quad \text{y} \quad \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \tag{1.3}$$

Esto indica que el orden de los términos en una suma de vectores no importa. Dicho de otro modo, la suma de vectores sigue la ley conmutativa.

La figura 1.11c muestra otra representación de la suma vectorial: si dibujamos los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ con sus colas en el mismo punto, el vector $\vec{C}$ es la diagonal de un paralelogramo construido con $\vec{A}$ y $\vec{B}$ como dos lados adyacentes.

CUIDADO **Magnitudes en la suma de vectores** Es un error común suponer que si $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$, entonces la magnitud C debería ser igual a la magnitud A más la magnitud B. En general, tal conclusión es *errónea*; para los vectores de la figura 1.11 es evidente que $C < A + B$. La magnitud de $\vec{A} + \vec{B}$ depende de las magnitudes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y también del ángulo que forman $\vec{A}$ y $\vec{B}$ (véase el problema 1.92). Sólo en el caso especial en que $\vec{A}$ y $\vec{B}$ sean *paralelos*, la magnitud de $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ es igual a la suma de las magnitudes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ (figura 1.12a). En cambio, cuando los vectores son *antiparalelos* (figura 1.12b) la magnitud de $\vec{C}$ es la *diferencia* de las magnitudes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Si usted se cuida de distinguir entre cantidades escalares y vectoriales, evitará cometer errores respecto a la magnitud de una suma vectorial.

Si necesitamos sumar más de dos vectores, podemos sumar primero dos cualesquiera, sumar la resultante al tercero, etcétera. La figura 1.13a muestra tres vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$. En la figura 1.13b, se suman primero $\vec{A}$ y $\vec{B}$ para dar la suma vectorial $\vec{D}$; luego se suman los vectores $\vec{C}$ y $\vec{D}$ de la misma forma para obtener la resultante $\vec{R}$:

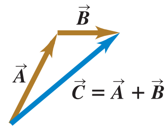
$$\vec{R} = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{D} + \vec{C}$$

Como alternativa, podemos sumar primero $\vec{B}$ y $\vec{C}$ para obtener el vector $\vec{E}$ (figura 1.13c), y luego sumar $\vec{A}$ y $\vec{E}$ para obtener $\vec{R}$:

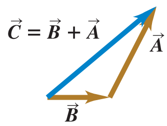
$$\vec{R} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} + \vec{E}$$

1.11 Tres formas de sumar dos vectores. Como se muestra en b), el orden no importa en la suma de vectores, la cual es conmutativa.

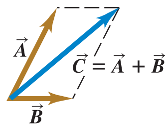
a) Podemos sumar dos vectores colocándolos punta con cola.



b) Al sumarlos a la inversa se obtiene el mismo resultado.

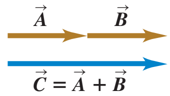


c) Podemos también sumarlos construyendo un paralelogramo.

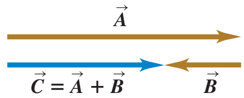


1.12 a) En el caso especial de que dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ sean paralelos, la magnitud de su suma es igual a la suma de sus magnitudes: $C = A + B$. b) Cuando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son antiparalelos, la magnitud de su suma es igual a la *diferencia* de sus magnitudes: $C = |A - B|$.

a) La suma de dos vectores paralelos

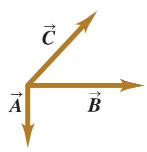


b) La suma de dos vectores antiparalelos

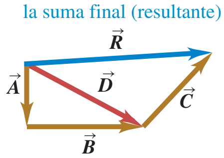


1.13 Varias construcciones para obtener la suma vectorial $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$.

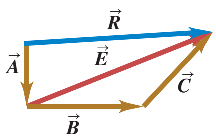
a) Para obtener la suma de estos tres vectores ...



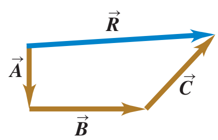
b) podríamos sumar $\vec{A}$ y $\vec{B}$ para encontrar $\vec{D}$ y luego sumar $\vec{C}$ a $\vec{D}$ para obtener la suma final (resultante) $\vec{R}$, ...



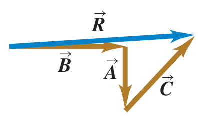
c) o podríamos sumar $\vec{B}$ y $\vec{C}$ para obtener $\vec{E}$ y después sumar $\vec{A}$ a $\vec{E}$ para calcular $\vec{R}$, ...



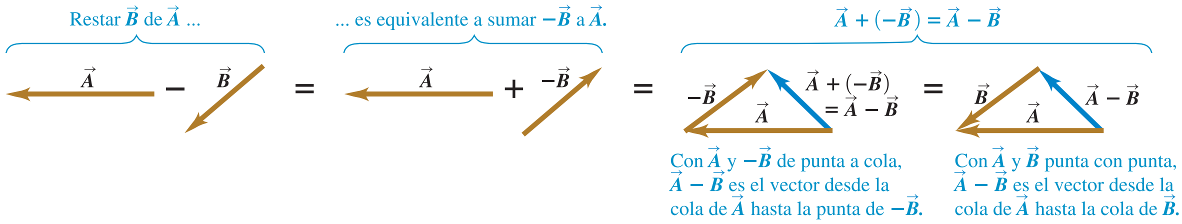
d) o podríamos sumar $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ para obtener $\vec{R}$ directamente ...



e) o podríamos sumar $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ en cualquier otro orden y aun así obtener $\vec{R}$.



1.14 Para construir la diferencia vectorial $\vec{A} - \vec{B}$, podrá colocar ya sea la cola de $-\vec{B}$ en la punta de $\vec{A}$ o bien, colocar los dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ punta con punta.



No necesitamos dibujar los vectores $\vec{D}$ ni $\vec{E}$; basta con dibujar los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ dados en sucesión, con la cola de cada uno en la punta del vector anterior. La suma vectorial va de la cola del primero hasta la punta del último (figura 1.13d). El orden no importa; la figura 1.13e muestra un orden distinto, y el lector puede intentar otros. Vemos así que la suma de vectores obedece a la ley asociativa.

Así como sumamos vectores también podemos *restarlos*. Para aprender cómo, recuerde que el vector $-\vec{A}$ tiene la misma magnitud que $\vec{A}$ pero dirección opuesta. Definimos la diferencia $\vec{A} - \vec{B}$ de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ como la suma vectorial de $\vec{A}$ y $-\vec{B}$:

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) \tag{1.4}$$

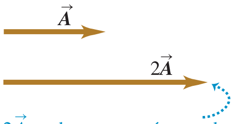
La figura 1.14 muestra un ejemplo de resta de vectores.

Una cantidad vectorial, como el desplazamiento, se puede multiplicar por una cantidad escalar (un número ordinario). El desplazamiento $2\vec{A}$ es un desplazamiento (cantidad vectorial) en la misma dirección que $\vec{A}$ pero dos veces más largo; esto equivale a sumar $\vec{A}$ a sí mismo (figura 1.15a). En general, cuando un vector $\vec{A}$ se multiplica por un escalar c, el resultado $c\vec{A}$ tiene magnitud $|c|A$ (el valor absoluto de c multiplicado por la magnitud del vector $\vec{A}$). Si c es positivo, $c\vec{A}$ tiene la misma dirección que $\vec{A}$; si c es negativo, $c\vec{A}$ tiene la dirección opuesta a la de $\vec{A}$. Así, $3\vec{A}$ es paralelo a $\vec{A}$, pero $-3\vec{A}$ es antiparalelo a $\vec{A}$ (figura 1.15b).

El escalar que multiplica un vector también puede ser una cantidad física con unidades. Por ejemplo, es posible que el lector conozca la relación $\vec{F} = m\vec{a}$; la fuerza neta $\vec{F}$ (una cantidad vectorial) que actúa sobre un cuerpo es igual al producto de la masa del cuerpo m (una cantidad escalar positiva) y su aceleración $\vec{a}$ (una cantidad vectorial). La dirección de $\vec{F}$ es la misma que la de $\vec{a}$ porque m es positiva, y la magnitud de $\vec{F}$ es igual a la masa m (que es positiva e igual a su propio valor absoluto) multiplicada por la magnitud de $\vec{a}$. La unidad de la magnitud de la fuerza es la unidad de masa multiplicada por la unidad de la magnitud de la aceleración.

1.15 Multiplicación de un vector a) por un escalar positivo y b) por un escalar negativo.

a) Al multiplicar un vector por un escalar positivo, la magnitud (longitud) del vector podría cambiar, pero no su dirección.



$2\vec{A}$ es dos veces más grande que $\vec{A}$.

b) Al multiplicar un vector por un escalar negativo, podría cambiar su magnitud e invertir su dirección.

$-3\vec{A}$ es tres veces más grande que $\vec{A}$ y apunta en la dirección contraria.

Ejemplo 1.5 Suma vectorial

Una esquiadora de fondo viaja 1.00 km al norte y luego 2.00 km al este por un campo nevado horizontal. ¿A qué distancia y en qué dirección está con respecto al punto de partida?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El problema implica combinar desplazamientos, así que podemos resolverlo con una suma de vectores. Las incógnitas son la distancia total y la dirección de la esquiadora con respecto a su punto de partida. La distancia es sólo la magnitud de su vector de desplazamiento resultante del punto de origen al punto donde se detuvo, y la dirección que buscamos es la dirección del vector de desplazamiento resultante.

PLANTEAR: La figura 1.16 es un diagrama a escala de los desplazamientos de la esquiadora. Describimos la dirección desde el punto de partida con el ángulo ϕ (la letra griega fi). Si medimos con cuidado, veremos

1.16 Diagrama vectorial, a escala, de un recorrido en esquí a campo traviesa.

que la distancia al punto inicial es de unos 2.2 km y ϕ es aproximadamente 63°. No obstante, podemos *calcular* un resultado mucho más exacto sumando los vectores de desplazamiento de 1.00 km y 2.00 km.

EJECUTAR: Los vectores del diagrama forman un triángulo rectángulo; la distancia del punto de partida al punto final es igual a la longitud de la hipotenusa. Obtenemos esta longitud usando el teorema de Pitágoras:

$$\sqrt{(1.00\text{ km})^2 + (2.00\text{ km})^2} = 2.24\text{ km}$$

El ángulo ϕ se obtiene mediante trigonometría simple. Si usted necesita un repaso, en el Apéndice B se resumen las funciones y las identidades trigonométricas, así como otras relaciones matemáticas y geométricas útiles. Por la definición de la función tangente,

$$\tan\phi = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{2.00\text{ km}}{1.00\text{ km}}$$
$$\phi = 63.4°$$

Podemos describir la dirección como 63.4° al este del norte o 90° − 63.4° = 26.6° al norte del este. ¡Como prefiera!

EVALUAR: Conviene practicar verificando los resultados de un problema de suma vectorial con mediciones efectuadas en un dibujo de la situación. Felizmente, las respuestas que obtuvimos calculando (2.24 km y ϕ = 63.4°) son muy cercanas a los resultados burdos que obtuvimos midiendo (unos 2.2 km y aproximadamente 63°). Si fueran muy distintos, tendríamos que regresar y buscar los posibles errores.

Evalúe su comprensión de la sección 1.7 Dos vectores de desplazamiento, $\vec{S}$ y $\vec{T}$, tienen magnitudes $S = 3$ m y $T = 4$ m. ¿Cuál de los siguientes resultados podría ser la magnitud de la diferencia vectorial $\vec{S} - \vec{T}$? (Podría haber más de una respuesta correcta.) i) 9 m; ii) 7 m; iii) 5 m; iv) 1 m; v) 0 m; vi) −1 m.

MP

1.8 Componentes de vectores

En la sección 1.7 sumamos vectores usando un diagrama a escala y las propiedades de los triángulos rectángulos. Al medir un diagrama se obtiene sólo una exactitud muy limitada y los cálculos con triángulos rectángulos funcionan únicamente cuando los dos vectores son perpendiculares. Necesitamos entonces un método sencillo pero general para sumar vectores: el método de *componentes*.

Para definir las componentes de un vector $\vec{A}$, partimos de un sistema rectangular de ejes de coordenadas (cartesiano) (figura 1.17) y luego dibujamos el vector con su cola en O, el origen del sistema. Podemos representar cualquier vector en el plano xy como la suma de un vector paralelo al eje x y un vector paralelo al eje y. Rotulamos esos vectores como $\vec{A}_x$ y $\vec{A}_y$ en la figura 1.17a; son los **vectores componentes** del vector $\vec{A}$, y su suma vectorial es igual a $\vec{A}$. Simbólicamente,

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y \tag{1.5}$$

Puesto que cada vector componente tiene la dirección de un eje de coordenadas, sólo necesitamos un número para describirlo. Si el vector componente $\vec{A}_x$ apunta hacia la dirección x positiva, definimos el número A_x como la magnitud de $\vec{A}_x$. Si el vector componente $\vec{A}_x$ apunta en la dirección x negativa, definimos el número A_x como el negativo de dicha magnitud (la magnitud de una cantidad vectorial en sí misma nunca es negativa). Definimos el número A_y del mismo modo. Los dos números A_x y A_y son las **componentes** de $\vec{A}$ (figura 1.17b).

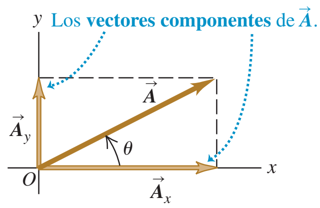
CUIDADO **Las componentes no son vectores** Las componentes A_x y A_y de un vector $\vec{A}$ son tan sólo números: *no* son vectores. Por ello, las simbolizamos con letra cursiva normal *sin* flecha arriba, en vez de la letra cursiva negrita con flecha que está reservadas para los vectores.

Podemos calcular las componentes del vector $\vec{A}$ si conocemos la magnitud A y su dirección. Describiremos la dirección de un vector con su ángulo relativo a una dirección de referencia, que en la figura 1.17b es el eje x positivo, y el ángulo

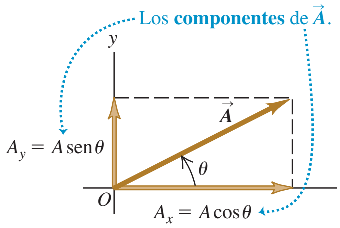
?

1.17 Representación de un vector $\vec{A}$ en términos de a) los vectores componentes $\vec{A}_x$ y $\vec{A}_y$ y b) las componentes A_x y A_y (en este caso, ambas son positivas).

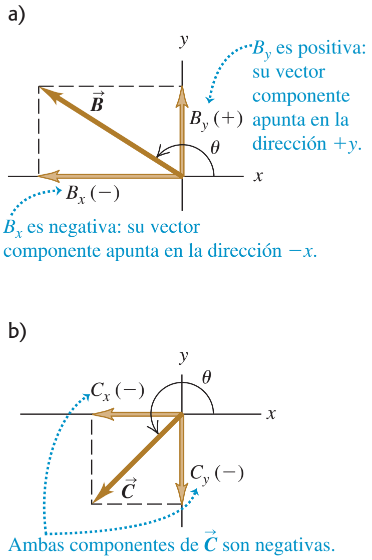
a)



b)



1.18 Las componentes de un vector pueden ser números positivos o negativos.



entre el vector $\vec{A}$ y el eje x positivo es θ (la letra griega theta). Imagine que el vector $\vec{A}$ yace originalmente sobre el eje $+x$ y luego lo gira hasta su dirección correcta, como indica la flecha sobre el ángulo θ en la figura 1.17b. Si la rotación es del eje $+x$ al eje $+y$, como indica la figura 1.17b, entonces θ es *positivo*; si la rotación es del eje $+x$ al eje $-y$, entonces θ es *negativo*. Por lo tanto, el eje $+y$ está a un ángulo de 90°, el eje $-x$ está a 180° y el eje $-y$ está a 270° (o $-90°$). Si medimos θ de esta manera, entonces por la definición de las funciones trigonométricas,

$$\frac{A_x}{A} = \cos\theta \qquad \text{y} \qquad \frac{A_y}{A} = \operatorname{sen}\theta$$

$$A_x = A\cos\theta \qquad \text{y} \qquad A_y = A\operatorname{sen}\theta \tag{1.6}$$

(θ medido del eje $+x$ girando hacia el eje $+y$)

En la figura 1.17b, A_x es positiva porque su dirección está sobre el eje $+x$, y A_y es positiva porque su dirección está en el eje $+y$. Esto es congruente con las ecuaciones (1.6); θ está en el primer cuadrante (entre 0 y 90°) y tanto el coseno como el seno del ángulo son positivos en este cuadrante. En cambio, en la figura 1.18a, la componente B_x es negativa: su dirección es opuesta a la dirección del eje $+x$. Esto también es congruente con las ecuaciones (1.6); el coseno de un ángulo en el segundo cuadrante es negativo. La componente B_y es positiva (sen θ es positivo en el segundo cuadrante). En la figura 1.18b, tanto C_x como C_y son negativas (cos θ y sen θ son negativos en el tercer cuadrante).

CUIDADO **Relación entre la magnitud de un vector y la dirección de sus componentes** Las ecuaciones (1.6) son correctas *sólo* si el ángulo θ se mide desde el eje x positivo, como se describe aquí. Si el ángulo del vector se da desde otra dirección de referencia, o se utiliza otro sentido de rotación, las relaciones son distintas. ¡Tenga cuidado! El ejemplo 1.6 ilustra este punto.

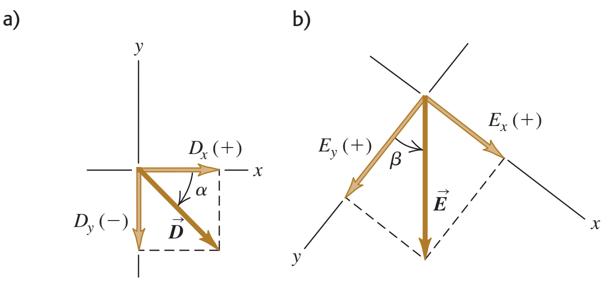
Ejemplo 1.6 Cálculo de componentes

a) ¿Cuáles son las componentes x y y del vector $\vec{D}$ en la figura 1.19a? La magnitud del vector es $D = 3.00$ m y el ángulo es $\alpha = 45°$. b) ¿Cuáles son las componentes x y y del vector $\vec{E}$ en la figura 1.19b? La magnitud del vector es $E = 4.50$ m y el ángulo $\beta = 37.0°$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En cada caso, se nos dan la magnitud y la dirección de un vector, y se nos pide calcular sus componentes.

1.19 Cálculo de las componentes x y y de vectores.



PLANTEAR: Parecería que sólo necesitamos las ecuaciones (1.6). Sin embargo, debemos tener cuidado porque los ángulos de la figura 1.19 *no* están medidos del eje $+x$ al eje $+y$.

EJECUTAR: a) El ángulo entre $\vec{D}$ y el eje x positivo es α (la letra griega alfa); pero este ángulo se mide hacia el eje y *negativo*. Por lo tanto, en las ecuaciones (1.6) debemos usar el ángulo $\theta = -\alpha = -45°$. Obtenemos

$$D_x = D\cos\theta = (3.00\text{ m})(\cos(-45°)) = +2.1\text{ m}$$
$$D_y = D\operatorname{sen}\theta = (3.00\text{ m})(\operatorname{sen}(-45°)) = -2.1\text{ m}$$

El vector tiene una componente x positiva y una componente y negativa, como se muestra en la figura. Si por descuido hubiéramos usado $\theta = +45°$ en las ecuaciones (1.6), habríamos obtenido D_y con el signo equivocado.

b) El eje x no es horizontal en la figura 1.19b, ni el eje y es vertical. No se preocupe; piense que los ejes x y y pueden tener *cualquier* orientación, siempre y cuando los ejes sean perpendiculares entre sí. (En el capítulo 5 usaremos ejes como éstos para estudiar el deslizamiento de un objeto sobre una rampa; un eje quedará sobre la rampa, y el otro será perpendicular a la rampa.)

Aquí el ángulo β (la letra griega beta) es el ángulo entre $\vec{E}$ y el eje $+y$, *no* el eje $+x$, así que *no podemos* usar este ángulo en las ecuaciones (1.6). En cambio, observe que $\vec{E}$ define la hipotenusa de un triángulo rectángulo; los otros dos lados del triángulo son las magnitudes de E_x y E_y, es decir, las componentes x y y de $\vec{E}$. El seno de β es el cateto opuesto (la magnitud E_x) dividido entre la hipotenusa (la magnitud E); en tanto que el coseno de β es el cateto adyacente (la magnitud de E_y) dividido entre la hipotenusa (otra vez, la magnitud E). Ambas componentes de $\vec{E}$ son positivas, así que

$$E_x = E\,\mathrm{sen}\,\beta = (4.50\text{ m})(\mathrm{sen}\,37.0°) = +2.71\text{ m}$$
$$E_y = E\cos\beta = (4.50\text{ m})(\cos 37.0°) = +3.59\text{ m}$$

Si hubiéramos usado las ecuaciones (1.6) directamente escribiendo $E_x = E\cos 37.0°$ y $E_y = E\,\mathrm{sen}\,37.0°$, ¡las respuestas para E_x y para E_y se habrían invertido!

Si usted insiste en usar las ecuaciones (1.6), primero deberá encontrar el ángulo entre $\vec{E}$ y el eje $+x$, medido hacia el eje $+y$; es decir, $\theta = 90.0° - \beta = 90.0° - 37.0° = 53.0°$. Entonces, $E_x = E\cos\theta$ y $E_y = E\,\mathrm{sen}\,\theta$. Ahora sustituya los valores de E y θ en las ecuaciones (1.6) para demostrar que los resultados para E_x y E_y son los mismos que ya obtuvimos.

EVALUAR: Observe que las respuestas en el inciso b) tienen 3 cifras significativas, pero las del a) tienen sólo 2. ¿Sabe por qué?

Cálculos de vectores usando componentes

Utilizar componentes hace relativamente fáciles diversos cálculos que implican vectores. Veamos tres ejemplos importantes.

1. Cálculo de la magnitud y la dirección de un vector a partir de sus componentes. Podemos describir un vector plenamente dando su magnitud y dirección, o bien, sus componentes x y y. Las ecuaciones (1.6) indican cómo obtener las componentes si conocemos la magnitud y la dirección. También podemos invertir el proceso y obtener la magnitud y la dirección a partir de las componentes. Aplicando el teorema de Pitágoras a la figura 1.17b, vemos que la magnitud de un vector $\vec{A}$ es

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \tag{1.7}$$

(Siempre tomamos la raíz positiva.) La ecuación (1.7) es válida para cualesquiera ejes x y y, siempre y cuando sean perpendiculares entre sí. La expresión para la dirección vectorial proviene de la definición de la tangente de un ángulo. Si medimos θ desde el eje $+x$, y un ángulo positivo se mide hacia el eje $+y$ (como en la figura 1.17b), entonces

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x} \qquad \text{y} \qquad \theta = \arctan\frac{A_y}{A_x} \tag{1.8}$$

Siempre usaremos la notación arctan para la función tangente inversa. También suele usarse la notación $\tan^{-1}$, y una calculadora podría tener una tecla INV o 2ND para usarse con la tecla TAN. Microsoft Excel usa ATAN.

CUIDADO **Cálculo de la dirección de un vector a partir de sus componentes** Hay un pequeño inconveniente en el uso de las ecuaciones (1.8) para obtener θ. Suponga que $A_x = 2$ m y $A_y = -2$ m como en la figura 1.20; entonces $\tan\theta = -1$. Sin embargo, hay dos ángulos con tangente -1, 135 y 315° (o $-45°$). En general, cualesquiera dos ángulos que difieran en 180° tienen la misma tangente. Para decidir cuál es correcto, debemos examinar las componentes individuales. Dado que A_x es positiva y A_y es negativa, el ángulo debe estar en el cuarto cuadrante; así que $\theta = 315°$ (o $-45°$) es el valor correcto. La mayoría de las calculadoras de bolsillo dan $\arctan(-1) = -45°$. En este caso es lo correcto, pero si tuviéramos $A_x = -2$ m y $A_y = 2$ m, entonces el ángulo correcto es 135°. Asimismo, si A_x y A_y son negativas, la tangente es positiva, por lo que el ángulo estará en el tercer cuadrante. *Siempre* debe hacerse un dibujo, como la figura 1.20, para verificar cuál de las dos posibilidades es la correcta.

2. Multiplicación de un vector por un escalar. Si multiplicamos un vector $\vec{A}$ por un escalar c, cada componente del producto $\vec{D} = c\vec{A}$ es sólo el producto de c por la componente correspondiente de $\vec{A}$:

$$D_x = cA_x \qquad D_y = cA_y \qquad (\text{componentes de } \vec{D} = c\vec{A}) \tag{1.9}$$

Por ejemplo, la ecuación (1.9) indica que cada componente del vector $2\vec{A}$ es dos veces mayor que la componente correspondiente del vector $\vec{A}$, de manera que $2\vec{A}$ está en la misma dirección que $\vec{A}$ pero tiene el doble de magnitud. Cada componente del

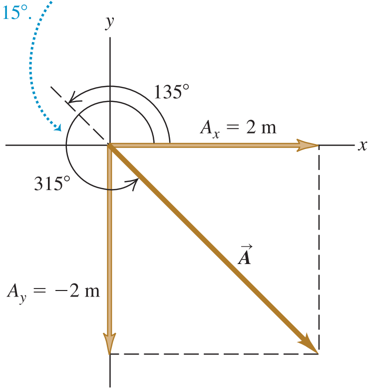
1.20 Elaborar un diagrama de vectores indica los signos de sus componentes x y y.

Suponga que $\tan\theta = \dfrac{A_y}{A_x} = -1.$

¿Cuál es el valor de θ?

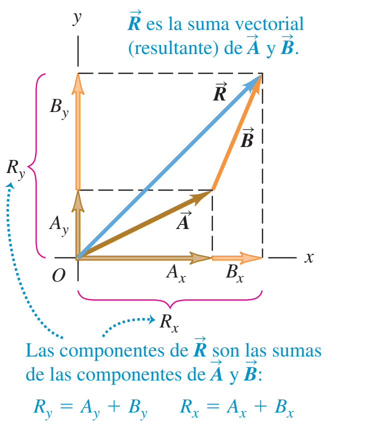
Dos ángulos tienen tangentes de -1: 135 y 315°.

El análisis del diagrama demuestra que θ debe ser 315°.



vector $-3\vec{A}$ es tres veces mayor que la componente correspondiente del vector $\vec{A}$ pero tiene el signo contrario, así que $-3\vec{A}$ está en la dirección opuesta de $\vec{A}$ y tiene una magnitud tres veces más grande. Por lo tanto, las ecuaciones (1.9) son congruentes con nuestro estudio de la sección 1.7, al multiplicar un vector por un escalar (véase la figura 1.15).

1.21 Obtención de la suma vectorial (resultante) de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ usando componentes.



3. Uso de componentes para calcular la suma de vectores (resultante) de dos o más vectores. La figura 1.21 muestra dos vectores, $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y su suma vectorial $\vec{R}$, junto con las componentes x y y de los tres vectores. En el diagrama se observa que la componente R_x de la resultante es simplemente la suma $(A_x + B_x)$ de las componentes x de los vectores sumados. Lo mismo sucede con las componentes y. Simbólicamente,

$$R_x = A_x + B_x \qquad R_y = A_y + B_y \qquad \left(\text{componentes de } \vec{R} = \vec{A} + \vec{B}\right) \tag{1.10}$$

La figura 1.21 muestra este resultado para el caso en que las componentes A_x, A_y, B_x y B_y son positivas. Dibuje diagramas adicionales para verificar que las ecuaciones (1.10) son válidas *sin importar* el signo de las componentes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Si conocemos las componentes de dos vectores cualesquiera $\vec{A}$ y $\vec{B}$, usando las ecuaciones (1.6) podríamos calcular las componentes de la resultante $\vec{R}$. Entonces, si necesitamos la magnitud y la dirección de $\vec{R}$, las obtendremos de las ecuaciones (1.7) y (1.8), cambiando las A por R.

Es fácil extender este procedimiento para calcular la suma de cualquier cantidad de vectores. Sea $\vec{R}$ la suma vectorial de $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}, \vec{E}, \ldots$, entonces, las componentes de $\vec{R}$ son

$$\begin{aligned} R_x &= A_x + B_x + C_x + D_x + E_x + \cdots \\ R_y &= A_y + B_y + C_y + D_y + E_y + \cdots \end{aligned} \tag{1.11}$$

Sólo hemos hablado de vectores que están en el plano xy; no obstante, el método de componentes funciona también para vectores con cualquier dirección en el espacio. Introducimos un eje z perpendicular al plano xy; entonces, en general, un vector $\vec{A}$ tiene componentes A_x, A_y y A_z en las tres direcciones de coordenadas. La magnitud A está dada por

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{1.12}$$

Siempre tomamos la raíz positiva. También, las ecuaciones (1.11) para las componentes de la suma vectorial $\vec{R}$ tienen un miembro adicional:

$$R_z = A_z + B_z + C_z + D_z + E_z + \cdots$$

Por último, aunque nuestro análisis de la suma de vectores se centró en combinar vectores de *desplazamiento*, el método se aplica igualmente a todas las demás cantidades vectoriales. Al estudiar el concepto de fuerza en el capítulo 4, veremos que las fuerzas son vectores que obedecen las mismas reglas de suma vectorial que usamos con el desplazamiento. Otras cantidades vectoriales aparecerán en capítulos posteriores.

Estrategia para resolver problemas 1.3 Suma de vectores

MP

IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes:* Decida cuál es la incógnita. Podría ser la magnitud de la suma vectorial, la dirección o ambas cuestiones.

PLANTEAR *el problema:* Dibuje los vectores que va a sumar y los ejes de coordenadas que va a emplear. En su bosquejo, coloque la cola del primer vector en el origen de las coordenadas; coloque la cola del segundo vector en la punta del primer vector, y así sucesivamente. Trace la suma vectorial $\vec{R}$ desde la cola del primer vector hasta la punta del último. Examinando su dibujo, haga una estimación burda de la magnitud y la dirección de $\vec{R}$; usará dichas estimaciones después para verificar sus cálculos.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Obtenga las componentes x y y de cada vector y anote los resultados en una tabla. Si un vector se describe con su magnitud A y su ángulo θ, medido del eje $+x$ al eje $+y$, las componentes son

$$A_x = A\cos\theta \qquad A_y = A\operatorname{sen}\theta$$

Algunas componentes podrían ser positivas y otras negativas, dependiendo de la orientación del vector (es decir, del cuadrante donde se encuentra θ). Puede usar esta tabla de signos para verificar:

Cuadrante	I	II	III	IV
A_x	+	−	−	+
A_y	+	+	−	−

Si los ángulos de los vectores se dan de otra forma, quizá con otra referencia direccional, conviértalos en ángulos medidos desde el eje $+x$ como se describió. Tenga especial cuidado con los signos.

2. Sume algebraicamente las componentes x, incluyendo los signos, para obtener R_x, la componente x de la resultante. Haga lo mismo con las componentes y para obtener R_y.

3. Entonces, la magnitud R y la dirección θ de la resultante estarán dadas por

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \qquad \theta = \arctan\frac{R_y}{R_x}$$

EVALUAR *la respuesta:* Verifique la magnitud y la dirección obtenidas en la suma vectorial comparándolas con las estimaciones basadas en su dibujo. Recuerde que la magnitud R *siempre* es positiva y que θ se mide desde el eje x positivo. El valor de θ obtenido con una calculadora puede ser el correcto, o quizá tenga un error de 180°. La decisión se toma examinando el dibujo.

Si sus cálculos son muy diferentes de la estimación realizada a partir del dibujo, verifique si su calculadora está en modo de "radianes" o de "grados". Si está en modo de radianes, introducir ángulos en grados dará respuestas absurdas.

Ejemplo 1.7 Suma de vectores con componentes

Los tres finalistas de un concurso de TV se colocan en el centro de un campo plano grande. Cada uno cuenta con una regla graduada de un metro de longitud, una brújula, una calculadora, una pala y (en diferente orden para cada concursante) los siguientes desplazamientos:

72.4 m, 32.0° al este del norte
57.3 m, 36.0° al sur del oeste
17.8 m al sur

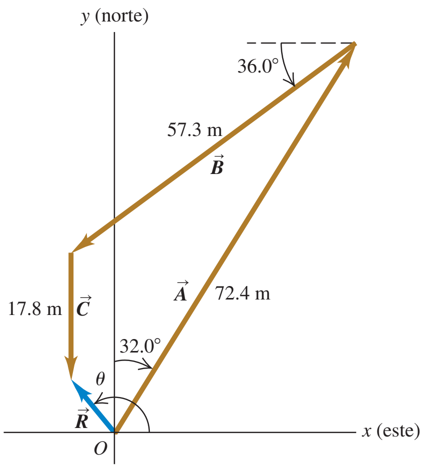
Los tres desplazamientos llevan al punto donde están enterradas las llaves de un Porsche nuevo. Dos concursantes comienzan a medir de inmediato; sin embargo, la ganadora primero *calcula* adónde debe ir. ¿Qué calculó?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La finalidad es encontrar la suma (resultante) de los tres desplazamientos, así que se trata de un problema de suma vectorial.

PLANTEAR: La situación se muestra en la figura 1.22. Elegimos el eje $+x$ como este, y el eje $+y$ como norte, que es lo usual en los mapas.

1.22 Tres desplazamientos sucesivos $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ y el desplazamiento resultante (suma vectorial) $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$.



Sea $\vec{A}$ el primer desplazamiento, $\vec{B}$ el segundo y $\vec{C}$ el tercero. Podemos estimar en el diagrama que la resultante $\vec{R}$ está a unos 10 m, 40° al oeste del norte.

EJECUTAR: Los ángulos de los vectores, medidos del eje $+x$ al eje $+y$, son (90.0° − 32.0°) = 58.0°, (180.0° + 36.0°) = 216.0° y 270°. Debemos obtener sus componentes. Dada nuestra elección de ejes, podemos usar las ecuaciones (1.6), que nos dan las siguientes componentes de $\vec{A}$:

$$A_x = A\cos\theta_A = (72.4\text{ m})(\cos 58.0°) = 38.37\text{ m}$$
$$A_y = A\,\text{sen}\,\theta_A = (72.4\text{ m})(\text{sen}\,58.0°) = 61.40\text{ m}$$

Observe que conservamos una cifra significativa extra en las componentes. Esperaremos hasta el final para redondear al número correcto de cifras significativas. La siguiente tabla muestra las componentes de todos los desplazamientos, la suma de las componentes y los demás cálculos. Siempre ordene sistemáticamente sus cálculos.

Distancia	Ángulo	Componente *x*	Componente *y*
$A = 72.4$ m	58.0°	38.37 m	61.40 m
$B = 57.3$ m	216.0°	−46.36 m	−33.68 m
$C = 17.8$ m	270.0°	0.00 m	−17.80 m
		$R_x = -7.99$ m	$R_y = 9.92$ m

$$R = \sqrt{(-7.99\text{ m})^2 + (9.92\text{ m})^2} = 12.7\text{ m}$$

$$\theta = \arctan\frac{9.92\text{ m}}{-7.99\text{ m}} = 129° = 39° \text{ al oeste del norte}$$

Los perdedores intentan medir tres ángulos y tres distancias para un total de 147.5 m, un metro a la vez. La ganadora midió sólo un ángulo y una distancia mucho más corta.

EVALUAR: Los valores que calculamos para R y θ no son muy diferentes de nuestras estimaciones de 10 m y 40° al oeste del norte; ¡muy bien! Observe que $\theta = -51°$, o bien, 51° al sur del este, también satisface la ecuación de θ. Sin embargo, como la ganadora hizo un dibujo de los vectores de desplazamiento (figura 1.22), ella sabe que $\theta = 129°$ es la única solución correcta para el ángulo.

Ejemplo 1.8 Vector en tres dimensiones

Un avión despega y viaja 10.4 km al oeste, 8.7 km al norte y 2.1 km hacia arriba. ¿A qué distancia está de su punto de partida?

SOLUCIÓN

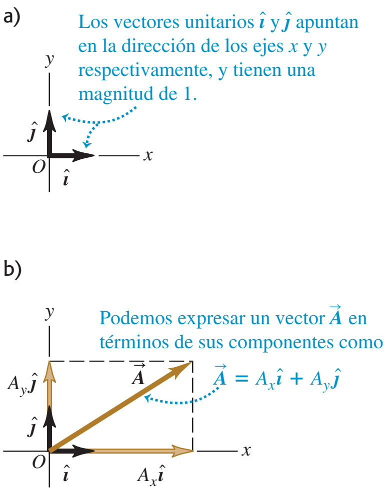
Sea el eje $+x$ al este, el eje $+y$ al norte y el eje $+z$ hacia arriba. Entonces, $A_x = -10.4$ km, $A_y = 8.7$ km y $A_z = 2.1$ km; la ecuación (1.12) da

$$A = \sqrt{(-10.4\text{ km})^2 + (8.7\text{ km})^2 + (2.1\text{ km})^2} = 13.7\text{ km}$$

Evalúe su comprensión de la sección 1.8 Dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ están en el plano xy. *a)* ¿Esto es posible para $\vec{A}$ que tiene la misma magnitud que $\vec{B}$ pero componentes diferentes? *b)* ¿Esto es posible para $\vec{A}$ que tiene las mismas componentes que $\vec{B}$ pero una magnitud diferente?

1.9 Vectores unitarios

1.23 a) Los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$. b) Expresión de un vector $\vec{A}$ en términos de sus componentes.



Un **vector unitario** es un vector con magnitud 1, sin unidades. Su única finalidad consiste en direccionar, es decir, describir una dirección en el espacio. Los vectores unitarios ofrecen una notación cómoda para muchas expresiones que incluyen componentes de vectores. Siempre incluiremos un acento circunflejo o "sombrero" (^) sobre el símbolo de un vector unitario para distinguirlo de los vectores ordinarios cuya magnitud podría o no ser 1.

En un sistema de coordenadas x-y podemos definir un vector unitario $\hat{\imath}$ que apunte en la dirección del eje $+x$ y un vector unitario $\hat{\jmath}$ que apunte en la dirección del eje $+y$ (figura 1.23a). Así, expresamos la relación entre vectores componentes y componentes, descrita al principio de la sección 1.8, como sigue:

$$\begin{aligned} \vec{A}_x &= A_x\hat{\imath} \\ \vec{A}_y &= A_y\hat{\jmath} \end{aligned} \tag{1.13}$$

Asimismo, escribimos un vector $\vec{A}$ en términos de sus vectores componentes como

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} \tag{1.14}$$

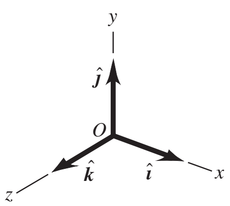
Las ecuaciones (1.13) y (1.14) son vectoriales; cada término, como $A_x\hat{\imath}$, es una cantidad vectorial (figura 1.23b). Los signos igual y más en negritas indican igualdad y suma de vectores.

Cuando representamos dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en términos de sus componentes, podemos expresar la resultante $\vec{R}$ usando vectores unitarios como sigue:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} \\ \vec{B} &= B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} \\ \vec{R} &= \vec{A} + \vec{B} \\ &= (A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}) + (B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath}) \\ &= (A_x + B_x)\hat{\imath} + (A_y + B_y)\hat{\jmath} \\ &= R_x\hat{\imath} + R_y\hat{\jmath} \end{aligned} \tag{1.15}$$

La ecuación (1.15) replantea el contenido de las ecuaciones (1.10) en forma de una sola ecuación vectorial, en vez de dos ecuaciones de componentes.

1.24 Los vectores unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$.



Si todos los vectores no están en el plano xy, necesitaremos una tercera componente. Introducimos un tercer vector unitario $\hat{k}$ que apunta en la dirección del eje $+z$ (figura 1.24). Las ecuaciones (1.14) y (1.15) se vuelven, entonces,

$$\begin{aligned} \vec{A} &= A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \\ \vec{B} &= B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k} \end{aligned} \tag{1.16}$$